הכנה למבחן — משוואות דיפרנציאליות

5 ביולי 2026

תוכן עניינים

1 משפטים חשובים 3
1.1 משפט הקיום של פיאנו 3
1.2 משפט פיקארד 5
1.3 יציבות 6
2 פתרון תרגילים רנדומליים 7
2.1 נקודות שיווי משקל 7
2.2 שימוש בשיטת גורם האינטגרציה 8
2.3 שימוש בוריאציה של קבועים 9
2.4 דברים חשובים מתרגילים 9
3 דברים חשובים (בעיניי) מהתרגילים 10
3.1 תרגיל 1 10
3.2 תרגיל 2 10
3.3 תרגיל 3 10

1 משפטים חשובים

1.1 משפט הקיום של פיאנו

משפט 1.1 משפט הקיום של פיאנו

תהיי $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה, $F : U \to \mathbb{R}^n$ רציפה ו־$\widetilde{x_0} \in U$ נקודת התחלה.
אז יש $\delta > 0$ ופונקציה גזירה $x : (-\delta, \delta) \to U$ שפותרת את בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} x(0) = \widetilde{x_0} \\ x'(t) = F(x(t)) \end{cases}$$

הוכחה: יהי $r > 0$ כך ש־$B := \overline{B(\widetilde{x_0}, r)} \subseteq U$, נסמן $M := \|F|_B\|_\infty = \sup_{x \in B} |F(x)|$, נגדיר $\delta = \frac{r}{M}$ ואת סדרת הפונקציות $x_n : [-\delta, \delta] \to U$ על־ידי

$$x_0(t) = \widetilde{x_0}$$

$$\text{for } 1 \le j \le k-1,\ x_k(t) = \begin{cases} \widetilde{x_0} + tF(\widetilde{x_0}) & t \in \left[-\frac{\delta}{k}, \frac{\delta}{k}\right] \\ x_k\left(\frac{j\delta}{k}\right) + \left(t - \frac{j\delta}{k}\right) F\left(x_k\left(\frac{j\delta}{k}\right)\right) & t \in \left[\frac{j\delta}{k}, \frac{(j+1)\delta}{k}\right] \\ x_k\left(-\frac{j\delta}{k}\right) + \left(t + \frac{j\delta}{k}\right) F\left(x_k\left(-\frac{j\delta}{k}\right)\right) & t \in \left[-\frac{(j+1)\delta}{k}, -\frac{j\delta}{k}\right] \end{cases}$$

נשים לב ש־$x_k(t)$ לינארית למקוטעין ב־t ולכן גזירה פרט למספר סופי של נקודות ותמונתה נמצאת בכדור B, כלומר $Im(x_k) \in B$ שכן לכל $0 < \delta < t$ מתקיים

$$\begin{aligned} \|x_k(t) - \widetilde{x_0}\| &= \left\| \int_0^t x_k'(s)\,\mathrm{d}s \right\| \\ &\underset{\triangle}{\le} \int_0^\delta \|x_k'(s)\|\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^{\frac{\delta}{k}} \|F(\widetilde{x_0})\|\,\mathrm{d}s + \sum_{j=1}^{k-1} \int_{\frac{j\delta}{k}}^{\frac{(j+1)\delta}{k}} \left\| F\left(x_k\left(\frac{j\delta}{k}\right)\right) \right\| \mathrm{d}s \end{aligned}$$

באופן רקורסיבי ניתן להראות שלכל j מתקיים $x_k\left(\frac{j\delta}{k}\right) \in B$ ולכן $\left\|F\left(x_k\left(\frac{j\delta}{k}\right)\right)\right\| \le M$ ונקבל לבסוף

$$\begin{aligned} \|x_k(t) - \widetilde{x_0}\| &\le \int_0^{\frac{\delta}{k}} \|F(\widetilde{x_0})\|\,\mathrm{d}s + \sum_{j=1}^{k-1} \int_{\frac{j\delta}{k}}^{\frac{(j+1)\delta}{k}} \left\| F\left(x_k\left(\frac{j\delta}{k}\right)\right) \right\| \mathrm{d}s \\ &\le M \cdot \frac{\delta}{k} + \sum_{j=1}^{k-1} M\left(\frac{(j+1)\delta}{k} - \frac{j\delta}{k}\right) \\ &\le M \cdot \delta \\ &= r \end{aligned}$$

באופן זהה נקבל גם עבור $-\delta < t < 0$ ולכן הסדרה $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ חסומה במידה שווה (שכן כולן בתוך B) והן רציפות במידה אחידה שכן לכל k מתקיים

$$\|x_k(t) - x_k(s)\| \le M|t - s|$$

אז הסדרה רציפה במידה אחידה ולכן ממשפט ארצלה־אסקולי יש לסדרה תת־סדרה $\left(x_{k_j}\right)_{j=1}^\infty$ מתכנסת במידה שווה לגבול x ולשם הפשטות נקרא לתת־סדרה זו $(x_k)_{k=1}^\infty$.
נרצה להראות ש־x גזירה ומקיימת $x'(t) = F(x(t))$ ומכך ש־F רציפה מהמשפט היסודי מספיק להראות

$$x(t) = \widetilde{x_0} + \int_0^t F(x(s))\,\mathrm{d}s$$

ואכן, לכל k נגדיר את $y_k : [-\delta, \delta] \to U$ ולכל $1 \le j < k$ על־ידי

$$y_k(s) = \begin{cases} \widetilde{x_0} & s \in \left[-\frac{\delta}{k}, \frac{\delta}{k}\right] \\ x_k\left(\frac{j\delta}{k}\right) & s \in \left[\frac{\delta j}{k}, \frac{(j+1)\delta}{k}\right] \\ x_k\left(-\frac{j\delta}{k}\right) & s \in \left[-\frac{(j+1)\delta}{k}, -\frac{j\delta}{k}\right] \end{cases}$$

אז לכל k מתקיים $x_k(t) = \widetilde{x_0} + \int_0^t F(y_k(s))\,\mathrm{d}s$ ומתקיים

$$\|y_k - x_k\|_\infty \le \frac{M\delta}{k} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$$

אז (y_k) מתכנסת במידה שווה לאורך אותה תת־סדרה ל־x.

יתר על־כן, $F \circ y_k \to F \circ x$ במידה שווה לאורך התת־סדרה שכן F רציפה במידה שווה ב־B: כי אם $\varepsilon > 0$, קיימת $\eta > 0$ כך שלכל $p, q \in B$ מתקיים $\|p - q\| < \eta$ ומתקיים $\|F(p) - F(q)\| < \varepsilon$.

ניקח L_0 כך שלכל $\ell > L_0$ ולכל $t \in [-\delta, \delta]$ מתקיים $\left\|y_{k_\ell}(t) - x(t)\right\| < \eta$ כי ההתכנסות במידה שווה אבל אז לכל $\ell > L_0$ מתקיים $\left\|F\left(y_{k_\ell}(t)\right) - F(x(t))\right\| < \varepsilon$ ומכך שרציפות במידה שווה מאפשרת להחליף סדר של גבול ואינטגרל

$$x(t) = \lim_{\ell\to\infty} x_{k_\ell}(t) = \widetilde{x_0} + \lim_{\ell\to\infty} \int_0^t F\left(y_{k_\ell}(s)\right) \mathrm{d}s = \widetilde{x_0} + \int_0^t \lim_{\ell\to\infty} F\left(y_{k_\ell}(s)\right) \mathrm{d}s = \widetilde{x_0} + \int_0^t F(x(s)) \, \mathrm{d}s$$

$\square$

1.2 משפט פיקארד

משפט 1.2 משפט פיקארד

תהיי $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה, $\widetilde{x_0} \in \mathbb{R}^n$ ותהיי $F : U \to \mathbb{R}^n$ שהיא ליפשיצית מקומית כלומר לכל $K \subseteq U$ קומפקטית יש קבוע L_K כך ש־$F|_K$ ליפשיצית עם הקבוע L_K.
אזי יש $\delta > 0$ כך שקיים פתרון יחיד בקטע $[-\delta, \delta]$ לבעיה

$$\begin{cases} x(0) = \widetilde{x_0} \\ x'(t) = F(x(t)) \end{cases}$$

ישנן שתי הוכחות למשפט – אחת באמצעות משפט העתקה מכווצת שראינו בתרגול 2 ואחת מההרצאה.
הוכחה של יונתן בהרצאה: משפט פיקארד נובע מהלמה הבאה בעזרת משפט פיאנו.

למה 1.3

תהיי $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה ו־$F : U \to \mathbb{R}^n$ ליפשיצית מקומית.
נניח ש־$x(t)$ ו־$y(t)$ שני פתרונות של המשוואה $\eta'(t) = F(\eta(t))$ כך ש־x מוגדר על הקטע הפתוח $I \subseteq \mathbb{R}$ ו־y מוגדר על הקטע הפתוח $J \subseteq \mathbb{R}$.
אם $0 \in I \cap J$ ו־$x(0) = y(0)$ אזי $x(t) = y(t)$ לכל $t \in I \cap J$.

הוכחה: נוכיח ש־$x(t) = y(t)$ לכל $t \in I \cap J \cap [0, \infty)$. נניח שלא ככה ונגדיר $\tau = \inf\{t \in I \cap J \cap (0, \infty) \mid x(t) \neq y(t)\}$ ומרציפות $\overline{x} = x(\tau) = y(\tau)$.
ניקח $r > 0$ כך ש־$\overline{B_{2r}(\overline{x})} \subseteq U$ וניקח $\delta > 0$ כך שיתקיים $[\tau, \tau + \delta] \subseteq I \cap J$ וגם $x(t), y(t) \in \overline{B_r(\overline{x})}$ לכל $t \in [\tau, \tau + \delta]$.
נסמן ב־L את קבוע ליפשיץ של $F|_{\overline{B_r(\overline{x})}}$, עבור $t \in [\tau, \tau + \delta]$ מתקיים

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|x(t) - y(t)\|^2 &= 2(x(t) - y(t), x'(t) - y'(t)) \\ &= 2(x(t) - y(t), F(x(t)) - F(y(t))) \\ &\underset{(\star)}{\leq} 2\|x(t) - y(t)\| \cdot \|F(x(t)) - F(y(t))\| \\ &\underset{(\star\star)}{\leq} 2L \cdot \|x(t) - y(t)\|^2 \end{aligned}$$

כאשר $(\star)$ זה אי־שיוויון קושי־שוורץ ו־$(\star\star)$ זה מהליפשיציות.
אז הפונקציה $f(t) = e^{-2Lt}\|x(t) - y(t)\|^2$ היא מונוטונית יורדת כי מגזירה

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f = -2Lf(t) + 2Lf(t) = 0$$

הנגזרת לא חיובית ולכן היא מונוטונית יורדת ובנוסף $f(t)$ אי־שלילית ב־$[\tau, \tau + \delta]$ אבל $f(\tau) = 0$ ולכן $f(t) = 0$ לכל $t \in [\tau, \tau + \delta]$ ולכן $\|x(t) - y(t)\| = 0$ וזו סתירה להגדרת τ בתור אינפימום.
עבור t־יים שליליים ההוכחה דומה עם sup ופונקציה קצת אחרת או להסתכל על $\tilde{x}(t) = x(-t)$ ומהמשוואה $\eta'(t) = -F(\eta(t))$. □
□

1.3 יציבות

למה 1.4

תהיי $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ מטריצה עם קבוצת ערכים עצמיים $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ ונניח ש־$\max_{\lambda\in\Lambda} Re(\lambda) < 0$.
אזי לכל $0 < \alpha < \min_{\lambda\in\Lambda}|Re(\lambda)|$ יש $C > 0$ כך שלכל $t \geq 0$ מתקיים

$$\|\exp(tA)\|_{op} \leq Ce^{-t\alpha}$$

בפרט

$$\lim_{t\to\infty} \exp(tA) = 0$$

הוכחה: נניח ש־$J = PAP^{-1}$ צורת ז'ורדן של A.
נשים לב ש־$J + \alpha I$ היא מטריצה בצורדת ז'ורדן שכל שלכל ערכייה העצמיים חלק ממשי שלילי.
לכן עבור $t \geq 0$ הערכים של $\exp(t(J + \alpha I))$ הם פולינומים ב־t כפול אקספוננט עם מעריך שלילי ב־t ולכן קיים $C' > 0$ כך שמתקיים

$$\sup_{t\geq 0} \|\exp(t(J + \alpha I))\|_{op} \leq C'$$

לכן

$$\begin{aligned}
\|\exp(tA)\|_{op} &= \left\|P\exp(tJ)P^{-1}\right\|_{op} \\
&\leq \|P\|_{op}\left\|P^{-1}\right\|_{op}\|\exp(tJ)\|_{op} \\
&= \|P\|_{op}\left\|P^{-1}\right\|_{op}\|\exp(tJ + t\alpha I - t\alpha I)\|_{op} \\
&= \|P\|_{op}\left\|P^{-1}\right\|_{op}\|\exp(t(J + \alpha I))\|_{op} \cdot e^{-t\alpha} \leq C \cdot e^{-t\alpha}
\end{aligned}$$

□

2 פתרון תרגילים רנדומליים

2.1 נקודות שיווי משקל

2.2 שימוש בשיטת גורם האינטגרציה

דוגמה

נמצא את הפיתרון למשוואה $x'(t) = \frac{t}{t+1}x(t) + 1$ עם תנאי ההתחלה $x(0) = 1$ בתחום $(-1, \infty)$.

הוכחה: בשביל להשתמש במשפט 3.1 נגדיר

$$a(t) = \frac{t}{t+1}$$
$$f(t) = 1$$

אלו פונקציות רציפות ב־$(-1, \infty)$ ועבור $t_0 = 0$ מתקיים

$$\varphi(t) = \int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^t \frac{s}{s+1}\,\mathrm{d}s = t - \ln(t+1)$$

שהאחרונה מוגדרת היטב בתחום שלנו ולכן הפיתרון הוא מהצורה

$$x(t) = e^{\varphi(t)}\left(\int_{t_0}^t e^{-\varphi(s)} f(s)\,\mathrm{d}s + c\right) = \frac{e^t}{t+1}\left(\int_0^t \frac{s+1}{e^s}\,\mathrm{d}s + c\right) = \frac{e^t}{t+1}\left(-\frac{t+2}{e^t} + 2 + c\right)$$

תנאי ההתחלה הוא $x(0) = 1$ ונקבל

$$\frac{e^0}{0+1}\left(-\frac{0+2}{e^0} + 2 + c\right) = 1 \iff -2 + 2 + c = 1 \iff c = 1$$

כלומר

$$x(t) = \frac{e^t}{t+1}\left(-\frac{t+2}{e^t} + 3\right) = \frac{3e^t - t - 2}{t+1}$$

□

2.3 שימוש בוריאציה של קבועים

דוגמה

נתונה המערכת הלינארית

$$x'(t) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x(t) + v$$

היכן ש־$v \in \mathbb{R}^2$ וקטור קבוע.
באמצעות וריאציה של קבועים נכתוב נוסחה סגורה לפיתרון המשוואה עם תנאי ההתחלה $x_0 \in \mathbb{R}^2$ ולהוכיח שהנוסחה אכן מתארת את הפיתרון.

פתרון: אנחנו מתחילים מלחשב את הפולינום האופייני של A

$$\det(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 1 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (-2-\lambda)^2 - 1 = (\lambda+3)(\lambda+1)$$

ולכן הערכים העצמיים הם $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3$ ובהתאם נחשב

$$\begin{pmatrix} -2+1 & 1 \\ 1 & -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -2+3 & 1 \\ 1 & -3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ולכן המטריצה המלכסנת P והמטריצה האלכסונית D הן

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ועובדה חשובה שחוזרת על עצמה היא דרך חישוב של מטריצה הופכית למטריצה מסדר 2×2 על־ידי הנוסחה $P^{-1} = \frac{1}{\det(P)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
נקבל

$$e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-t}+e^{-3t} & e^{-t}-e^{-3t} \\ e^{-t}-e^{-3t} & e^{-t}+e^{-3t} \end{pmatrix}$$

לפי עיקרון דוהמל עבור $x(0) = x_0$ נקבל מטריצת הפתרונות היסודית ניתנת על־ידי $\pi(t) = e^{At}$ ומתקיים

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} g(s)\,\mathrm{d}s$$

במקרה שלנו $g(s) = v$ וקטור קבוע ולכן ניתן לחשב את האינטגרל מימין

$$\int_0^t e^{(t-s)A} v\,\mathrm{d}s = \left(\int_0^t e^{(t-s)A}\,\mathrm{d}s\right)v = \left(\int_0^t e^{uA}\,\mathrm{d}u\right)v = A^{-1}\big(e^{tA} - \mathrm{Id}\big)v$$

שכן $\det(A) \neq 0$ ולכן A הפיכה וכמקודם

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

ולכן המועמדת לנוסחה סגורה היא

$$x(t) = e^{tA}x_0 + A^{-1}\big(e^{tA} - \mathrm{Id}\big)v$$

כדי להראות שהיא אכן סגורה, נשים לב ש־$x(0) = x_0$ ולכן רק נשאר להראות האם $x'(t) = Ax(t) + v$ ואכן

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x(t)) = Ae^{tA}x_0 + A^{-1}Ae^{tA}v = A\big(e^{tA}x_0 + e^{tA}v\big)$$

וכן

$$A\big(e^{tA}x_0 + A^{-1}e^{tA}v - A^{-1}v\big) + v = Ae^{tA}x_0 + e^{tA}v - v + v = Ae^{tA}x_0 + e^{tA}v$$

כלומר קיבלנו שהנוסחה סגורה. □

2.4 דברים חשובים מתרגילים

3 דברים חשובים (בעיניי) מהתרגילים

3.1 תרגיל 1

משפט 3.1

יהי $J \in \mathbb{R}$ מקטע ונקבע $t_0 \in J$. נניח כי $a, f : J \to \mathbb{R}$ רציפות ונוכיח כי $x : J \to \mathbb{R}$ פותרת את המשוואה

$$x'(t) = a(t)x(t) + f(t)$$

אם ורק אם קיים $c \in \mathbb{R}$ כך שמתקיים

$$x(t) = e^{\varphi(t)} \left(\int_{t_0}^{t} e^{-\varphi(s)} f(s) \, \mathrm{d}s + c \right)$$

כאשר

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^{t} a(s) \, \mathrm{d}s$$

סקיצה להוכחה:
$\Longleftarrow$ מגדירים $y(t) = e^{-\varphi(t)} x(t)$ וגוזרים ואז מתכונות נגזרת אקספוננט נובע שקיים $c \in \mathbb{R}$ כך שמתקיים

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-\varphi(s)} f(s) \, \mathrm{d}s + c$$

$\Longrightarrow$ x גזירה ברציפות ולכן מכלל שרשרת מסיימים. □

3.2 תרגיל 2

למה 3.2 הלמה של גרונוול

יהי $\delta > 0$ ותהיינה $a, u : [0, \delta] \to \mathbb{R}$ כך שך־a רציפה ו־u גזירה ברציפות. נניח כי לכל $t \in (0, \delta)$ מתקיים

$$u'(t) \leq a(t)u(t)$$

1. מתקיים ש־$v(t) = e^{\int_0^t a(s) \, \mathrm{d}s}$ היא פיתרון לבעיה

$$\begin{cases} v'(t) = a(t)v(t) \\ v(0) = 1 \end{cases}$$

2. לכל $t \in [0, \delta)$ מתקיים

$$u(t) \leq u(0)v(t)$$

סקיצה להוכחה:
1. נסמן $g(t) = \int_0^t a(s) \, \mathrm{d}s$ וגוזרים לפי כלל שרשרת, מציבים 0 וסיימנו
2. נסתכל על $w(t) = \frac{u(t)}{v(t)}$, גוזרים ועם הסעיף הקודם רואים שהיא מונוטונית יורדת, מציבים 0 ומסיימים

□

3.3 תרגיל 3

משפט 3.3

יהי $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע שמכיל את 0, $A : I \to \mathbb{R}^{n \times n}, g : I \to \mathbb{R}^n$ פונקציות רציפות.
אזי לכל $x_0 \in \mathbb{R}^n$ קיים פתרון יחיד אשר מוגדר על כל I לבעיית ההתחלה

$$(\star) \begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + g(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

הוכחה: מספיק להוכיח את המשפט לכל קטע סגור וחסום $I_0 \subseteq I$.
נסמן

$$
\begin{aligned}
F(x,t) &\coloneqq A(t)x + g(t) \\
L &\coloneqq \sup_{t\in I_0} \|A(t)\|_{op} \\
M &\coloneqq \sup_{t\in I_0} \|g(t)\|
\end{aligned}
$$

מתקיים ש־$L < \infty$ שכן A רציפה ו־I_0 קומפקטי ולכן F רציפה ב־$\mathbb{R}^n \times I_0$ ומקיימת את תנאי ליפשיץ

$$\|F(x,t) - F(y,t)\| = \|A(t)\cdot(x-y)\| \le L\|x-y\|$$

ממשפט פיקארד מספיק להניח רציפות של F במשתנה הזמן וליפשציות מקומית של F במשתנה המיקום עם קבועי ליפשיץ שלא תלויים בזמן ולכן קיים פתרון יחיד לפרק זמן סופי כלשהו.

מכאן ניתן להתפצל לשני פתרונות שונים

1. מאי־שיוויון קושי־שוורץ נקבל

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|x(t)\|^2 &= 2\langle x'(t), x(t)\rangle \\
&= 2\langle A(t)x(t) + g(t), x(t)\rangle \\
&\le 2\|A(t)x(t) + g(t)\|\cdot\|x(t)\| \\
&\le 2\|A(t)x(t)\|\cdot\|x(t)\| + 2\|g(t)\|\cdot\|x(t)\| \\
&\le 2L\|x(t)\|^2 + 2M\|x(t)\|
\end{aligned}
$$

אז אפשר לקחת $0 < C$ שתלוי ב־L, M אבל לא תלוי ב־t (כי א חד ריבועי ב־$\|x(t)\|$ והשני לינארי בו) כך שמתקיים

$$2L\|x(t)\|^2 + 2M\|x(t)\| \le 4L\|x(t)\|^2 + C$$

בלי הגבלת הכלליות $0 < t$ ואז

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[e^{-4Lt}\|x(t)\|^2\right] \le Ce^{-4Lt} \le C$$

מאינטגרציה על התחום $[0,t]$ נקבל

$$\|x(t)\|^2 e^{-4Lt} - \|x_0\|^2 \le Ct \Longrightarrow \|x(t)\|^2 \le Cte^{4Lt} + \|x_0\|^2 e^{4Lt}$$

החסם הזה מעיד שהפתרון לא יכול להתפוצץ בזמן סופי (C, M, L תלויים בבחירת I_0 אבל הם קבועים שלא יכולים להתפוצץ בזמן סופי) ומטריכוטומיה הפתרון מוגדר היטב על כל I.

2. נראה שהפתרון אינו מתפוצץ על ידי מעבר למשוואה האינטגרלית השקולה:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t (A(s)x(s) + g(s))\,\mathrm{d}s$$

נניח ללא הגבלת הכלליות כי $t > 0$. מאי־שוויון המשולש לאינטגרלים ותכונות הנורמה נקבל:

$$
\begin{aligned}
\|x(t)\| &\le \|x_0\| + \int_0^t \|A(s)x(s) + g(s)\|\,\mathrm{d}s \\
&\le \|x_0\| + \int_0^t \left(\|A(s)\|_{op}\|x(s)\| + \|g(s)\|\right)\mathrm{d}s \\
&\le \|x_0\| + \int_0^t (L\|x(s)\| + M)\,\mathrm{d}s \\
&= (\|x_0\| + Mt) + \int_0^t L\|x(s)\|\,\mathrm{d}s \\
&= (\|x_0\| + Mt)e^{Lt}
\end{aligned}
$$

כאשר המעבר האחרון הוא מהלמה של גרונוול אז אם־כך החסם שקיבלנו מעיד שהנורמה של הפתרון חסומה לכל זמן $t \in I_0$.

ממשפט הטריכוטומיה מכיוון שהפתרון חסום על כל קטע סגור I_0, הוא אינו מתפוצץ בזמן סופי ולכן מוגדר היטב על כל I.

□